Alors :

$$\overrightarrow{w_3} = \overrightarrow{v_3} - \text{proj}_{\overrightarrow{v_2}}(\overrightarrow{v_3}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Étape 4 : Normalisation.

$$\|\overrightarrow{v_1}\| = \sqrt{4+4+1} = 3, \quad \overrightarrow{u_1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{v_2}\| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}, \quad \overrightarrow{u_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{w_3}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 4} = \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad \overrightarrow{u_3} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Résultat :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Et on a $A = PDP^T$.

7.3 Décomposition spectrale

Le théorème spectral nous permet d'écrire une matrice symétrique sous une forme particulièrement élégante appelée *décomposition spectrale*.

Définition 7.10 *Décomposition spectrale*

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$, diagonalisable orthogonalement avec $A = PDP^T$, où $P = \begin{bmatrix} \overrightarrow{u_1} & \overrightarrow{u_2} & \cdots & \overrightarrow{u_n} \end{bmatrix}$ est une matrice orthogonale dont les colonnes forment une base orthonormée de vecteurs propres, et $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ est la matrice diagonale des valeurs propres associées.

La *décomposition spectrale* de A est l'écriture :

$$A = \lambda_1 \overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_1}^T + \lambda_2 \overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_2}^T + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{u_n}\overrightarrow{u_n}^T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_i}^T$$

Remarques 7.7.0.11. *1. Pour chaque i, le produit $\overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_i}^T$ est une matrice $n \times n$ de rang 1. En effet, si $\overrightarrow{u_i}$ est un vecteur colonne, alors $\overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_i}^T$ donne une matrice dont toutes les colonnes sont colinéaires à $\overrightarrow{u_i}$.*

2. La matrice $\overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_i}^T$ représente la matrice de projection orthogonale sur la droite engendrée par $\overrightarrow{u_i}$.

3. La décomposition spectrale exprime donc A comme une somme pondérée de matrices de projection sur les sous-espaces propres, les poids étant les valeurs propres correspondantes.

Démonstration. [Justification de la décomposition spectrale] Soit $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$. Comme $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u_i})\overrightarrow{u_i} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{u_i}(\overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_i}^T\overrightarrow{x}$$

En appliquant A et en utilisant le fait que $A\overrightarrow{u_i} = \lambda_i\overrightarrow{u_i}$:

$$A\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} A\overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_i}^T\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_i}^T\overrightarrow{x} = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_i}^T\right)\overrightarrow{x}$$

Ceci étant vrai pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, on obtient $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_i}^T$. □

Exemple. Donnons la décomposition spectrale de $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Nous avons déjà calculé que $A = PDP^T$ avec :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs propres unitaires sont $\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (pour $\lambda_1 = 7$) et $\overrightarrow{u_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (pour $\lambda_2 = 3$).

Calculons les matrices de projection :

$$\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_1}^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_2}^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

La décomposition spectrale est donc :

$$A = 7 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Vérification :

$$7 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = A$$

Exemple. Donnons la décomposition spectrale de $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$.

Nous avons calculé précédemment que les valeurs propres sont $\lambda_1 = 0$ (multiplicité 1) et $\lambda_2 = 9$ (multiplicité 2), avec les vecteurs propres unitaires :

$$\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{u_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{u_3} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Les matrices de projection sont :

$$\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_1}^T = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_2}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{u_3}\overrightarrow{u_3}^T = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 16 \end{bmatrix}$$

La décomposition spectrale est :

$$A = 0 \cdot \overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_1}^T + 9 \cdot \overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_2}^T + 9 \cdot \overrightarrow{u_3}\overrightarrow{u_3}^T$$

Comme $\lambda_1 = 0$, le premier terme disparaît :

$$A = 9 \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 9 \cdot \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{9}{2} & 0 \\ -\frac{9}{2} & \frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} = A$$

Exemple (Calcul des puissances d'une matrice)**.** La décomposition spectrale permet de calculer facilement les puissances d'une matrice symétrique.

Soit $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Calculons A^{10}.

Nous avons établi la décomposition spectrale :

$$A = 7 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 7\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_1}^T + 3\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_2}^T$$

Propriété clé : Pour une matrice de projection $P_i = \overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_i}^T$ sur un vecteur unitaire, on a :

$$P_i^2 = \overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_i}^T\overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_i}^T = \overrightarrow{u_i}(\overrightarrow{u_i}^T\overrightarrow{u_i})\overrightarrow{u_i}^T = \overrightarrow{u_i} \cdot 1 \cdot \overrightarrow{u_i}^T = P_i$$

De plus, pour $i \neq j$:

$$P_iP_j = \overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_i}^T\overrightarrow{u_j}\overrightarrow{u_j}^T = \overrightarrow{u_i}(\overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{u_j})\overrightarrow{u_j}^T = \overrightarrow{u_i} \cdot 0 \cdot \overrightarrow{u_j}^T = 0$$

En développant $A^2 = (7P_1 + 3P_2)^2$:

$$A^2 = 49P_1^2 + 21P_1P_2 + 21P_2P_1 + 9P_2^2 = 49P_1 + 0 + 0 + 9P_2 = 7^2P_1 + 3^2P_2$$

Par récurrence, on obtient pour tout $n \geq 1$:

$$A^n = 7^n\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_1}^T + 3^n\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_2}^T$$

Donc :

$$A^{10} = 7^{10} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + 3^{10} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{7^{10}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{3^{10}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7^{10} + 3^{10} & 7^{10} - 3^{10} \\ 7^{10} - 3^{10} & 7^{10} + 3^{10} \end{bmatrix}$$

Numériquement, $7^{10} = 282475249$ et $3^{10} = 59049$, donc :

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 141267149 & 141208100 \\ 141208100 & 141267149 \end{bmatrix}$$

7.4 Décomposition en valeurs singulières

La diagonalisation orthogonale s'applique uniquement aux matrices symétriques (donc carrées). La décomposition en valeurs singulières (SVD, de l'anglais *Singular Value Decomposition*) étend cette idée à *toutes* les matrices, y compris les matrices rectangulaires. C'est l'une des factorisations les plus importantes en algèbre linéaire appliquée.

7.4.1 Valeurs singulières

Soit A une matrice $m \times n$ (pas nécessairement carrée). Même si A n'est pas diagonalisable au sens usuel, nous pouvons considérer la matrice $A^T A$ qui est :

— de taille $n \times n$ (carrée),

— symétrique, car $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$.

D'après le théorème spectral, $A^T A$ est diagonalisable en base orthonormée et admet n valeurs propres réelles.

Propriété 7.12

Les valeurs propres de $A^T A$ sont toutes positives ou nulles.

Démonstration. Soit λ une valeur propre de $A^T A$ et $\overrightarrow{v}$ un vecteur propre unitaire associé : $A^T A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$ avec $\|\overrightarrow{v}\| = 1$.

Calculons $\|A\overrightarrow{v}\|^2$:

$$\|A\overrightarrow{v}\|^2 = (A\overrightarrow{v}) \cdot (A\overrightarrow{v}) = (A\overrightarrow{v})^T (A\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}^T A^T A\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}^T (\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{v}^T\overrightarrow{v} = \lambda\|\overrightarrow{v}\|^2 = \lambda$$

Comme $\|A\overrightarrow{v}\|^2 \geq 0$, on a $\lambda \geq 0$. □

Remarques 7.7.0.13. *Si $\overrightarrow{v}$ est un vecteur propre unitaire de $A^T A$ associé à la valeur propre λ, alors $\|A\overrightarrow{v}\| = \sqrt{\lambda}$. Cette quantité mesure « l'étirement » subi par $\overrightarrow{v}$ sous l'action de A.*

Définition 7.14 *Valeurs singulières*

Soit A une matrice $m \times n$. Les *valeurs singulières* de A sont les racines carrées des valeurs propres de $A^T A$. On les note $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ et on les ordonne de façon décroissante :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$$

Si $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ sont les valeurs propres de $A^T A$, alors $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Remarques 7.7.0.15.

1. *Les valeurs singulières sont toujours réelles et non négatives.*
2. *Si $\overrightarrow{v_i}$ est un vecteur propre unitaire de $A^T A$ associé à λ_i, alors $\sigma_i = \|A\overrightarrow{v_i}\|$.*
3. *Le nombre de valeurs singulières non nulles est égal au rang de A, car* $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^T A)$ *(théorème 6.56).*

Exemple. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$. Calculons les valeurs singulières de A.

Étape 1 : Calculer $A^T A$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4+4 & -1-4-4 \\ -1-4-4 & 1+4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{bmatrix}$$

Étape 2 : Trouver les valeurs propres de $A^T A$.
Le polynôme caractéristique est :

$$p(\lambda) = \det(A^T A - \lambda \mathbb{I}_2) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -9 \\ -9 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)^2 - 81 = \lambda^2 - 18\lambda = \lambda(\lambda - 18)$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 18$ et $\lambda_2 = 0$.
Étape 3 : Calculer les valeurs singulières.

$$\sigma_1 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \quad \sigma_2 = \sqrt{0} = 0$$

Le rang de A est donc égal à 1 (une seule valeur singulière non nulle).

Exemple. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Calculons les valeurs singulières de A.

Étape 1 : Calculer $A^T A$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Étape 2 : Trouver les valeurs propres de $A^T A$.
Calculons le polynôme caractéristique en développant selon la troisième ligne :

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A^T A - \lambda \mathbb{I}_3) \\
&= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 3 \\ 4 & 5-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= 3 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5-\lambda & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (2-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\
&= 3[12 - 3(5-\lambda)] - 3[3(5-\lambda) - 12] + (2-\lambda)[(5-\lambda)^2 - 16] \\
&= 3(3\lambda - 3) - 3(3 - 3\lambda) + (2-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 9) \\
&= 9(\lambda - 1) + 9(\lambda - 1) + (2-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 9) \\
&= 18(\lambda - 1) + (2-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 9) \\
&= (\lambda - 1)[18 + (2-\lambda)(\lambda - 9)] \\
&= (\lambda - 1)[18 - \lambda^2 + 11\lambda - 18] \\
&= -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 11)
\end{aligned}$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 11$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 0$.
Étape 3 : Calculer les valeurs singulières.

$$\sigma_1 = \sqrt{11}, \quad \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 0$$

Le rang de A est égal à 2, car il y a exactement 2 valeurs singulières non nulles.

7.4.2 Théorème de décomposition en valeurs singulières

Théorème 7.16 *Décomposition en valeurs singulières (SVD)*

Soit A une matrice $m \times n$ de rang r. Il existe :
- une matrice orthogonale U de taille $m \times m$,
- une matrice orthogonale V de taille $n \times n$,
- une matrice Σ de taille $m \times n$ de la forme $\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ où D est une matrice diagonale $r \times r$ contenant les valeurs singulières non nulles $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ sur sa diagonale,

telles que :

$$A = U\Sigma V^T$$

Démonstration. **Construction de V :** Comme A^TA est symétrique, le théorème spectral garantit l'existence d'une base orthonormée $(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n})$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A^TA. On ordonne ces vecteurs de sorte que les valeurs propres associées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ soient décroissantes. On pose $V = \begin{bmatrix} \overrightarrow{v_1} & \cdots & \overrightarrow{v_n} \end{bmatrix}$.

Valeurs singulières : On pose $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ pour $i = 1, \ldots, n$. Supposons que A a exactement r valeurs singulières non nulles : $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ et $\sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_n = 0$.

Construction des premières colonnes de U : Pour $i = 1, \ldots, r$, on définit :

$$\overrightarrow{u_i} = \frac{1}{\sigma_i} A\overrightarrow{v_i}$$

Montrons que $\{\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_r}\}$ est orthonormé. Pour $i \neq j$:

$$\overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{u_j} = \overrightarrow{u_i}^T \overrightarrow{u_j} = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} (A\overrightarrow{v_i})^T A\overrightarrow{v_j} = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \overrightarrow{v_i}^T A^T A \overrightarrow{v_j} = \frac{\lambda_j}{\sigma_i \sigma_j} \overrightarrow{v_i}^T \overrightarrow{v_j} = 0$$

car $\overrightarrow{v_i}$ et $\overrightarrow{v_j}$ sont orthogonaux.

Pour $i = j$:

$$\|\overrightarrow{u_i}\|^2 = \frac{1}{\sigma_i^2} \overrightarrow{v_i}^T A^T A \overrightarrow{v_i} = \frac{\lambda_i}{\sigma_i^2} \|\overrightarrow{v_i}\|^2 = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2} \cdot 1 = 1$$

Complétion de U : On complète $\{\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_r}\}$ en une base orthonormée $\{\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_m}\}$ de $\mathbb{R}^m$, et on pose $U = \begin{bmatrix} \overrightarrow{u_1} & \cdots & \overrightarrow{u_m} \end{bmatrix}$.

Vérification : Par construction, $A\overrightarrow{v_i} = \sigma_i \overrightarrow{u_i}$ pour $i \leq r$, et $A\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{0}$ pour $i > r$ (car $\sigma_i = 0$).

Les colonnes de AV sont donc $\left[\sigma_1\overrightarrow{u_1}, \dots, \sigma_r\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{0}, \dots, \overrightarrow{0}\right]$.

Or la j-ème colonne de $U\Sigma$ est U multiplié par la j-ème colonne de Σ, c'est-à-dire $\sigma_j\overrightarrow{u_j}$ si $j \leq r$, et $\overrightarrow{0}$ sinon. Donc $AV = U\Sigma$.

Comme V est orthogonale, on a $VV^T = I_n$. En multipliant l'égalité $AV = U\Sigma$ à droite par V^T, on obtient

$$A = AVV^T = U\Sigma V^T.$$

□

Remarques 7.7.0.17. 1. *Les colonnes de V sont appelées* vecteurs singuliers à droite *de A. Ce sont les vecteurs propres unitaires de A^TA, ordonnés selon les valeurs propres décroissantes.*

2. *Les colonnes de U sont appelées* vecteurs singuliers à gauche *de A. Les r premières colonnes sont obtenues par $\overrightarrow{u_i} = \frac{1}{\sigma_i}A\overrightarrow{v_i}$ pour $i = 1, \dots, r$, et les colonnes restantes complètent une base orthonormée de $\mathbb{R}^m$.*
3. *La décomposition SVD n'est pas unique (les matrices U et V peuvent varier), mais la matrice Σ est unique (parce que l'on a ordonné les valeurs singulières).*
4. *Contrairement à la diagonalisation classique, la SVD existe pour* toute *matrice, qu'elle soit carrée ou rectangulaire.*
5. *L'ensemble $\{A\overrightarrow{v_1}, \dots, A\overrightarrow{v_r}\}$ constitue une base orthogonale de* $\mathrm{Im}(A)$. *De plus,* $\mathrm{rang}(A) = r$ *(le nombre de valeurs singulières non nulles).*

7.4.3 Méthode de calcul de la SVD

Méthode 7.18 *Calcul de la décomposition SVD*

Pour calculer la SVD $A = U\Sigma V^T$ d'une matrice A de taille $m \times n$:

Étape 1 : Diagonaliser A^TA en base orthonormée.
- Calculer A^TA (matrice $n \times n$ symétrique).
- Trouver les valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ de A^TA.
- Pour chaque valeur propre, calculer une base orthonormée de l'espace propre associé.

Étape 2 : Construire V et Σ.
- Les colonnes de V sont les vecteurs propres unitaires $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ de A^TA, ordonnés selon les valeurs propres décroissantes.
- Les valeurs singulières sont $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.
- Construire Σ de taille $m \times n$ avec les σ_i non nuls sur la diagonale.

Étape 3 : Construire U.
- Pour chaque valeur singulière non nulle σ_i, calculer $\overrightarrow{u_i} = \frac{1}{\sigma_i}A\overrightarrow{v_i}$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_r}$ forment une famille orthonormée.
- Si $r < m$, compléter en une base orthonormée de $\mathbb{R}^m$ en trouvant des vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_r}$ (ce qui revient à trouver une base de $\ker(A^T)$).

Exemple. Calculons la SVD de $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Étape 1 : Diagonalisation de A^TA.
Nous avons calculé $A^TA = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{bmatrix}$ avec les valeurs propres $\lambda_1 = 18$ et $\lambda_2 = 0$.

Pour $\lambda_1 = 18$: $A^TA - 18\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} -9 & -9 \\ -9 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

L'espace propre est $E_{18} = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$. Le vecteur unitaire est $\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Pour $\lambda_2 = 0$: $A^TA - 0 \cdot \mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

L'espace propre est $E_0 = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. Le vecteur unitaire est $\overrightarrow{v_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Vérification de l'orthogonalité : $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = \frac{1}{2}(1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1) = 0$

Étape 2 : Construction de V et Σ.

$$V = \begin{bmatrix} \overrightarrow{v_1} & \overrightarrow{v_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Les valeurs singulières sont $\sigma_1 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ et $\sigma_2 = 0$.
Le rang de A est $r = 1$. La matrice Σ est de taille 3×2 :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Étape 3 : Construction de U.
Pour $\sigma_1 = 3\sqrt{2}$:

$$\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{3\sqrt{2}} A\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Vérifions : $\|\overrightarrow{u_1}\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = 1$

Comme $r = 1$ et $m = 3$, il faut trouver deux vecteurs $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ orthogonaux à $\overrightarrow{u_1}$ et entre eux.

Ces vecteurs doivent satisfaire $\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u} = 0$, soit $x - 2y + 2z = 0$.

Prenons deux solutions linéairement indépendantes, par exemple $\overrightarrow{w_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{w_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Vérifions l'orthogonalité avec $\overrightarrow{u_1}$: $\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{w_1} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + 0 = 0$ $\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{w_2} = -\frac{2}{3} + 0 + \frac{2}{3} = 0$

Mais $\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{w_2} = -4 \neq 0$, donc il faut orthogonaliser par Gram-Schmidt.

Posons $\overrightarrow{u_2}' = \overrightarrow{w_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\|\overrightarrow{u_2}'\| = \sqrt{5}$.

$$\overrightarrow{u_3}' = \overrightarrow{w_2} - \frac{\overrightarrow{w_2} \cdot \overrightarrow{u_2}'}{\|\overrightarrow{u_2}'\|^2}\overrightarrow{u_2}' = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-4}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + \frac{8}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Après normalisation :

$$\overrightarrow{u_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{u_3} = \frac{1}{\sqrt{45}}\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Résultat final :

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Et $A = U\Sigma V^T$.

Remarque 7.7.0.19. *Dans la construction de la SVD, les premières colonnes de U sont imposées par les formules $\overrightarrow{u_i} = \frac{1}{\sigma_i}A\overrightarrow{v_i}$ pour les valeurs singulières non nulles. En revanche, les colonnes restantes ne sont pas uniques : dans les cas simples, on peut souvent les choisir « à la main » en prenant des vecteurs faciles à écrire, orthogonaux aux $\overrightarrow{u_i}$ déjà trouvés (et entre eux), puis en les normalisant. Toute matrice orthogonale U obtenue de cette façon, avec les bonnes premières colonnes, donne une SVD valide de A. Dans l'exemple ci-dessus, après avoir fixé $\overrightarrow{u_1}$ et un premier vecteur $\overrightarrow{w_1}$ orthogonal à $\overrightarrow{u_1}$, il restait à trouver un troisième vecteur orthogonal aux deux premiers. Le procédé de Gram-Schmidt donne une méthode fiable et répliquable, mais cela peut parfois se faire plus rapidement par un choix judicieux.*

Remarque 7.7.0.20. *Considérons la transposée $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, qui est une matrice 2×3. Sa SVD est :*

$$A^T = V\Sigma^T U^T$$

où U, Σ et V sont les matrices calculées ci-dessus pour A. Explicitement :

$$A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} U^T$$

En général, si $A = U\Sigma V^T$ est une SVD de A, alors $A^T = V\Sigma^T U^T$ est une SVD de A^T. Les valeurs singulières sont les mêmes, mais les rôles des vecteurs singuliers à gauche et à droite sont échangés.

Toutefois, si l'on recalculait la SVD de A^T à la main, en repartant de $(A^T)^T A^T = AA^T$, on obtiendrait en général des matrices orthogonales différentes (signes, choix de complétions orthogonales).

Exemple. Calculons la SVD de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Étape 1 : Diagonalisation de $A^T A$.
Nous avons calculé précédemment :

$$A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 11$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$.
Pour $\lambda_1 = 11$: on résout $(A^T A - 11\mathbb{I}_3)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

$$A^T A - 11\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 3 \\ 4 & -6 & 3 \\ 3 & 3 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système donne $x_1 + x_2 = 3x_3$ et $-10x_2 = -15x_3$, donc $x_2 = \frac{3}{2}x_3$ et $x_1 = \frac{3}{2}x_3$.
On prend $x_3 = 2$: $\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Pour $\lambda_2 = 1$: on résout $(A^T A - \mathbb{I}_3)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

$$A^T A - \mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système donne $x_1 = -x_2$ et $x_3 = 0$. On obtient $\overrightarrow{v_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Pour $\lambda_3 = 0$: on résout $A^T A\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système donne $x_1 + \frac{1}{3}x_3 = 0$ et $x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0$, donc $x_1 = x_2 = -\dfrac{1}{3}x_3$. En prenant par exemple $x_3 = -3$, on obtient un vecteur propre $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, que l'on normalise en

$$\overrightarrow{v_3} = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Étape 2 : Construction de V et Σ.

$$V = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{22}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{2}{\sqrt{22}} & 0 & -\frac{3}{\sqrt{11}} \end{bmatrix}$$

Les valeurs singulières sont $\sigma_1 = \sqrt{11}$, $\sigma_2 = 1$.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Étape 3 : Construction de U.

$$\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{\sqrt{11}} A\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{242}} \begin{bmatrix} 11 \\ 11 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{u_2} = A\overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Comme $m = 2 = r$, la matrice U est complète :

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Résultat final :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{2}{\sqrt{22}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{11}} & -\frac{3}{\sqrt{11}} \end{bmatrix}$$

Exemple. Calculons la SVD de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Étape 1 : Calcul et diagonalisation de $A^T A$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Calculons le polynôme caractéristique en développant selon la troisième colonne :

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A^T A - \lambda \mathbb{I}_3) \\
&= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (9-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (9-\lambda)\left[(5-\lambda)^2 - 16\right] \\
&= (9-\lambda)\left[(5-\lambda-4)(5-\lambda+4)\right] \\
&= (9-\lambda)^2(1-\lambda)
\end{aligned}$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 9$ (multiplicité 2) et $\lambda_2 = 1$ (multiplicité 1).
Espaces propres :
Pour $\lambda = 9$:

$$A^T A - 9\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système $x_1 - x_2 = 0$ donne $x_1 = x_2$, avec x_2 et x_3 libres. Donc :

$$E_9 = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Ces deux vecteurs sont déjà orthogonaux. On les normalise :

$$\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pour $\lambda = 1$:

$$A^T A - \mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système donne $x_1 = -x_2$ et $x_3 = 0$. Donc $E_1 = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

On normalise : $\overrightarrow{v_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Étape 2 : Construction de V et Σ.
Les valeurs singulières sont $\sigma_1 = \sigma_2 = 3$ et $\sigma_3 = 1$. Le rang est $r = 3$.

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Étape 3 : Construction de U.
Pour $\sigma_1 = 3$:

$$\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{3}A\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}3\\3\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\end{bmatrix}$$

Pour $\sigma_2 = 3$:

$$\overrightarrow{u_2} = \frac{1}{3}A\overrightarrow{v_2} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}0\\0\\3\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

Pour $\sigma_3 = 1$:

$$\overrightarrow{u_3} = \frac{1}{1}A\overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\end{bmatrix}$$

Comme $r = 3 < m = 4$, il faut compléter par un vecteur $\overrightarrow{u_4}$ orthogonal à $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$.

On vérifie aisément que $\overrightarrow{u_4} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ convient.

Résultat final :

$$U = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Définition 7.21 *Pseudo-inverse de Moore-Penrose*

Soit A une matrice $m \times n$ de rang r avec la SVD réduite $A = U_r D V_r^T$, où D est la matrice diagonale $r \times r$ des valeurs singulières non nulles. Le *pseudo-inverse* (ou *inverse de Moore-Penrose*) de A est la matrice $n \times m$ définie par :

$$A^+ = V_r D^{-1} U_r^T$$

Remarques 7.7.0.22. *Si A est carrée et inversible, alors $A^+ = A^{-1}$. Le pseudo-inverse généralise la notion d'inverse aux matrices non inversibles et non carrées.*

Propriété 7.23 *Solution au sens des moindres carrés*

Soit A une matrice $m \times n$ et $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$. Le vecteur $\hat{x} = A^+\overrightarrow{b}$ est la solution au sens des moindres carrés de longueur minimale de l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.